問題

1 光の進む速さが，毎秒 3.0×10^8 m であるとすると，光は 1 km を進むのに約 $3.3\times10^{\square}$ 秒かかる。□に適する整数を求めよ。 ▶p.149

$(\text{時間}) = \dfrac{(\text{距離})}{(\text{速さ})}$

$1\text{km} = 10^3\text{m}$ より

$(\text{時間}) = 10^3 \div (3.0\times10^8) = \dfrac{10}{3}\times10^2 \div 10^8$

$\fallingdotseq 3.3\times10^{2-8} = 3.3\times10^{-6}$ (秒)

2 次の式を計算せよ。 ▶p.151～153

(1) $\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{9}$　　(2) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}$

(3) $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})$　　(4) $(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})(2^{\frac{2}{3}}+1+2^{-\frac{2}{3}})$

(1) $\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{6\cdot9}$
$= \sqrt[3]{3^3\cdot2}$
$= 3\sqrt[3]{2}$

(2) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}$
$= \sqrt[4]{2^4\cdot3}-\sqrt[4]{3}$
$= 2\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$

(3) $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})$
$= (\sqrt[4]{3})^2-(\sqrt[4]{2})^2$
$= \sqrt[2\times2]{3^{1\times2}}-\sqrt[2\times2]{2^{1\times2}}$
$= \sqrt[2]{3}-\sqrt[2]{2}$
$= \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(4) $(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})(2^{\frac{2}{3}}+1+2^{-\frac{2}{3}})$
$= (2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})\{(2^{\frac{1}{3}})^2+2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}+(2^{-\frac{1}{3}})^2\}$
$= (2^{\frac{1}{3}})^3-(2^{-\frac{1}{3}})^3$
$= 2-2^{-1}$
$= 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

式がいいよ!

$(\text{与式}) = (3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}})$
$= (3^{\frac{1}{4}})^2-(2^{\frac{1}{4}})^2$
$= 3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

2 指数関数

aを1と異なる正の定数とするとき，$y=a^x$ はxの関数である。この関数を，aを **底** とするxの **指数関数** という。指数関数の特徴を調べよう。

A 指数関数 $y=a^x$ のグラフ

2を底とする指数関数 $y=2^x$ のグラフを調べてみよう。

たとえば，xが -2，-0.5，1.5 のときの 2^x の値は，次のようになる。

$$2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}=0.25$$

$$2^{-0.5}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 0.71 \quad (\sqrt{2}\fallingdotseq 1.4142\cdots)$$

$$2^{1.5}=2^{\frac{3}{2}}=2^1\times 2^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\fallingdotseq 2.83$$

練習 7 次の表は，指数関数 $y=2^x$ におけるxとyの対応表である。上の計算にならって，表の空らんをうめよ。

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4

$$2^{-1.5}=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\fallingdotseq 0.35$$

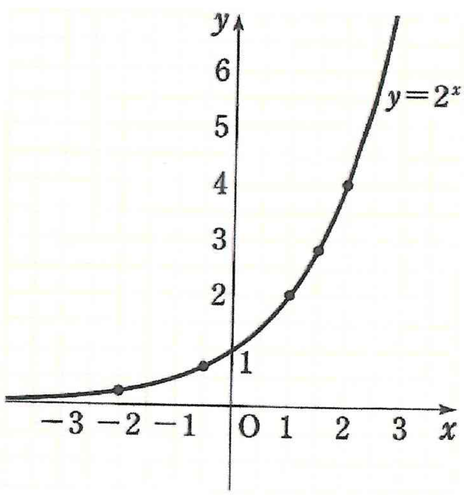
$$2^{-1}=\frac{1}{2}=0.5 \qquad 2^{0.5}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\fallingdotseq 1.41$$

座標平面上で，上の表のx，yを座標にもつ点(x, y)は，右の図のような曲線上にある。

この曲線が指数関数

$$y=2^x$$

のグラフである。



155P

次に，$\frac{1}{2}$ を底とする指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを調べてみよう。

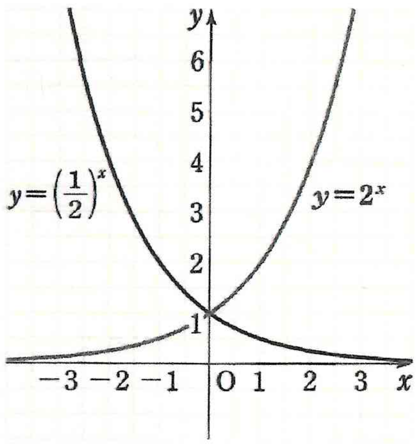
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x} \quad \Leftarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=2^{-x}$$

であるから，

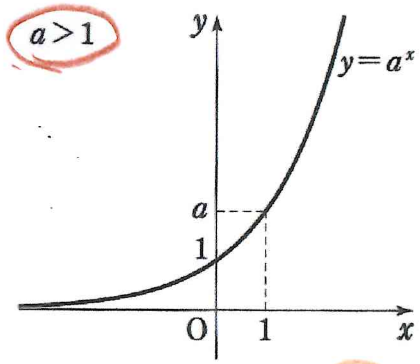
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は $y=2^{-x}$ と同じ

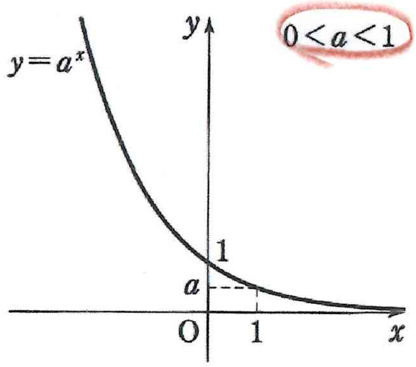
である。

したがって，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称であり，右の図のようになる。



一般に，指数関数 $y=a^x$ のグラフは，下の図のようになる。





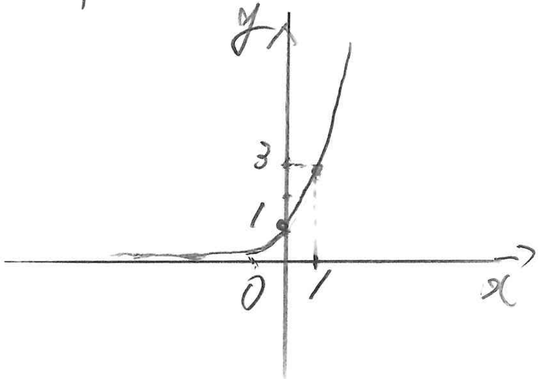
いずれの場合も，x 軸を漸近線としてもち，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。
$a>1$ のとき右上がりの曲線，$0<a<1$ のとき右下がりの曲線である。

「ぜんきんせん」

練習 8 次の関数のグラフをかけ。

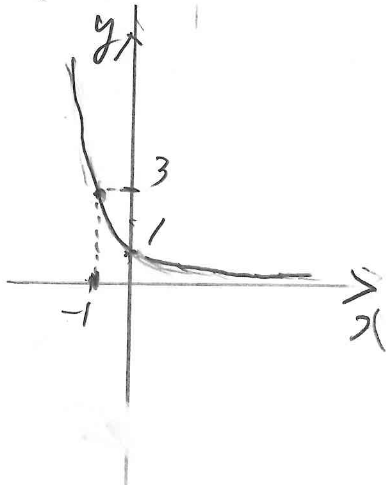
(1) $y=3^x$

x	-2	-1	0	1	2 …
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9 …



(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$

($y=3^x$ のグラフと y 軸に関して対称



B 指数関数の特徴

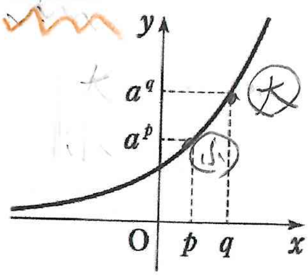
指数関数 $y=a^x$ の特徴

1 定義域は実数全体，
値域は正の数全体である。

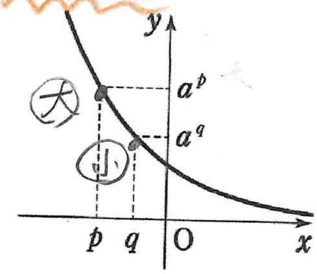
2 $a>1$ のとき，増加関数である。
すなわち　$p<q \iff a^p<a^q$

3 $0<a<1$ のとき，減少関数である。
すなわち　$p<q \iff a^p>a^q$

$a>1$



$0<a<1$



〈注意〉 $a>0$，$a \neq 1$ のとき，次が成り立つ。

$$p=q \iff a^p=a^q$$

例題 2 次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{8}$$

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$

$\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{2}{3}=0.66\cdots$，$\frac{3}{5}=0.6$

だから　$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$

底2は1より大だから　$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}$

すなわち　$\sqrt{2}<\sqrt[5]{8}<\sqrt[3]{4}$

練習 9 次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[4]{8}$，$\sqrt[5]{8}$

$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[4]{8}=2^{\frac{3}{4}}$，$\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$

$\frac{2}{3}=0.66\cdots$，$\frac{3}{4}=0.75$，$\frac{3}{5}=0.6$

より　$\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

$\therefore\ 2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[5]{8}<\sqrt[3]{4}<\sqrt[4]{8}$

(2) 1，0.2^3，0.2^{-1}

$1=\left(\frac{1}{5}\right)^0$，$0.2^3=\left(\frac{1}{5}\right)^3$，$0.2^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$-1<0<3$

底$\frac{1}{5}$は1より小だから

$\therefore\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}>\left(\frac{1}{5}\right)^0>\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$0.2^{-1}>1>0.2^3$