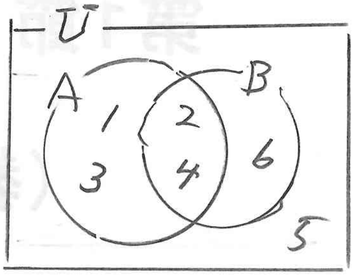
数A　場合の数　N01

本時の目標　　集合の要素の個数を求めることが出来る

集合Aの要素の個数が有限であるとき，その個数を $n(A)$ で表す。
空集合 $\varnothing$ は要素が 1 つもない集合であるから，$n(\varnothing)=0$ である。

例 1　集合の要素の個数を求める。
全体集合を $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
とする。Uの部分集合
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$
について
$n(A)=4$　$n(B)=3$
また，$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$
$\overline{A}=\{5, 6\}$であるから
$n(A\cup B)=5$，$n(\overline{A})=2$

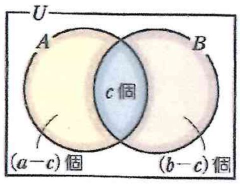


練習 1　例 1 の集合 U，A，B について，次の個数を求めよ。
(1) $n(U)$　　(2) $n(\overline{B})$　　(3) $n(A\cap B)$　　(4) $n(\overline{A\cup B})$

(1) $\overline{U}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$　　$n(\overline{U})=6$
(2) $\overline{B}=\{1, 3, 5\}$　　$n(B)=3$
(3) $A\cap B=\{2, 4\}$　　$n(A\cap B)=2$
(4) $\overline{A\cup B}=\{5\}$　　$n(\overline{A\cup B})=1$

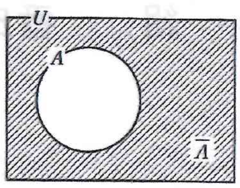
全体集合 Uの部分集合 A，B に対して，$n(A\cup B)$ を考えよう。
$n(A)=a$，$n(B)=b$，$n(A\cap B)=c$
とすると，右の図からわかるように
$n(A\cup B)=(a-c)+c+(b-c)=a+b-c$
である。すなわち，次の等式が成り立つ。

$$\boxed{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$



A の補集合 $\overline{A}$ の要素は，全体集合 U の要素から A の要素を除いた残りである。
したがって，次の等式が成り立つ。

$$\boxed{n(\overline{A})=n(U)-n(A)}$$



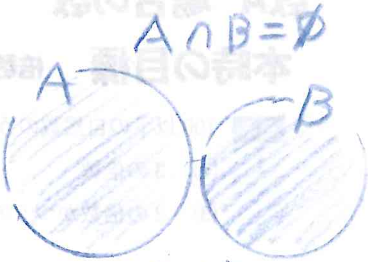
和集合，補集合の要素の個数

1 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

2 $n(\overline{A})=n(U)-n(A)$　　ただし，Uは全体集合

1において，とくに $A\cap B=\varnothing$ のときは，次のことが成り立つ。

$A\cap B=\varnothing$ のとき　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$　⬅ $n(A\cap B)=0$



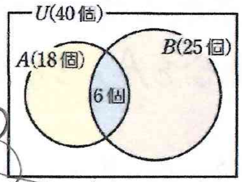
AとBが離れている
$n(A\cap B)=0$

例 2 和集合，補集合の要素の個数を求める。

全体集合 U の部分集合 A，B について

$n(U)=40$，$n(A)=18$，$n(B)=25$，

$n(A\cap B)=6$ であるとき



$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=18+25-6=37$

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=40-18=22$

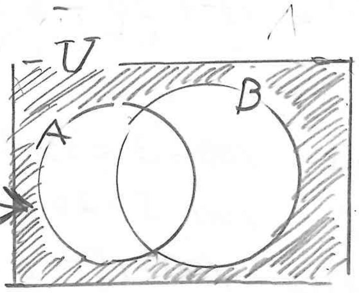
練習 2 例2の集合 U，A，B について，次の個数を求めよ。

(1) $n(\overline{B})$　　(2) $n(\overline{A\cup B})$　　(3) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$

(1) $n(\overline{B})=n(U)-n(B)$
$=40-25=15$

(2) $n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$
$=40-37=3$

(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$



或いは　ド・モルガンの法則より

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=40-37=3$

数A 場合の数 N02

本時の目標 倍数の個数を求めることができる。

例題 1 100 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 3 の倍数　　(2) 3 の倍数でない数

(3) 3 の倍数かつ 5 の倍数　　(4) 3 の倍数または 5 の倍数

100以下の自然数全体の集合をUとし，Uの部分集合で3の倍数全体の集合をA，5の倍数全体の集合をBとすると

$A=\{3, 6, 9, \cdots, 99\}$

$B=\{5, 10, 15, \cdots, 100\}$

$A\cap B=\{15, 30, 45, \cdots, 90\}$ ← 3と5の最小公倍数15の倍数

(1) $n(A)=33$ (答) 33個

(2) $n(\overline{A})=n(U)-n(A)$
$=100-33=67$ (答) 67個

(3) $n(A\cap B)=6$ (答) 6個

(4) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=33+20-6=47$ (答) 47個

(補足)

$n(A)$は $100\div3=33$ 余り1　$n(A)=33$個

$n(B)$は $100\div5=20$　$n(B)=20$個

$n(A\cap B)$は $100\div15=6$ 余り10　$n(A\cap B)=6$個

或いは

$A=\{3\cdot1, 3\cdot2, 3\cdot3, \cdots, 3\cdot33\}$ より $n(A)=33$

$B=\{5\cdot1, 5\cdot2, 5\cdot3, \cdots, 5\cdot20\}$ より $n(B)=20$

$A\cap B=\{15\cdot1, 15\cdot2, 15\cdot3, \cdots, 15\cdot6\}$ より $n(A\cap B)=6$

練習 3 100 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 6 の倍数　　(2) 6 の倍数でない数

(3) 4 の倍数かつ 6 の倍数　　(4) 4 の倍数または 6 の倍数

100以下の自然数全体の集合をUとし，Uの部分集合で4の倍数全体の集合をA，6の倍数全体の集合をBとすると，

$$A=\{4, 8, 12, \cdots, 100\}$$

$$B=\{6, 12, 18, \cdots, 96\}$$

$$A\cap B=\{12, 24, 36, \cdots, 96\}$$

(1) $n(B)=16$　　(答) 16個

(2) $n(\overline{B})=n(U)-n(B)$

$=100-16=84$　　(答) 84個

(3) $n(A\cap B)=8$　　(答) 8個

(4) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=25+16-8=33$　　(答) 33個