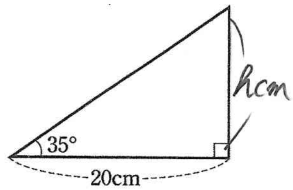
Let's think

10 文化祭で教室の装飾用にたくさんの図形のパーツを作ることになった。そのパーツの１つに右の図のような直角三角形がある。このパーツに絵の具で色を塗るために，面積を測る必要がある。この直角三角形の面積を，小数点以下を四捨五入して整数値で求めよ。



直角三角形の高さをhcmとすると

$h = 20\tan 35^\circ$

直角三角形の面積をSとすると

$S = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot h = 200\tan 35^\circ \fallingdotseq 200\times 0.7002 = 140.04$　$\underline{140\text{cm}^2}$

11 $\triangle$ABC の面積 S は，１辺の長さ a とその両端の角 B，C を用いて表すことができる。
まず，$\triangle$ABC が鋭角三角形の場合を考えよう。頂点Aから直線 BC に垂線 AH を引くと

$$\mathrm{BH}=\frac{\mathrm{AH}}{\tan B}\ \cdots\cdots ①,\quad \mathrm{CH}=\frac{\mathrm{AH}}{\tan C}\ \cdots\cdots ②$$

BC を BH，CH を用いて表すと　　BC＝BH＋CH　……③

よって，$\triangle$ABC の面積 S を a，B，C を用いて表すと $S=\boxed{}$ となる。

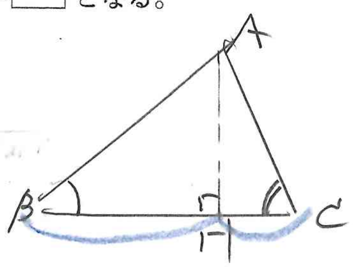
(1) $\boxed{}$ に当てはまる式を答えよ。

①，②，③より

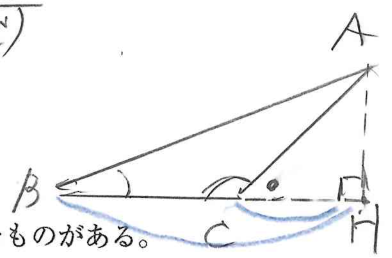
$$BC = \frac{AH}{\tan B} + \frac{AH}{\tan C}$$

$$= AH\cdot\frac{\tan B + \tan C}{\tan B\cdot\tan C}$$

よって　$AH = \dfrac{BC\tan B\tan C}{\tan B + \tan C}$



したがって　$S = \frac{1}{2}BC\cdot AH = \dfrac{a^2\tan B\tan C}{2(\tan B + \tan C)}$



(2) Cが鈍角のときには，①～③の式のうち，修正が必要なものがある。
修正が必要な番号についてのみ，修正した式をそれぞれ答えよ。

$\tan(180^\circ - C) = \dfrac{AH}{CH}$

したがって ②を $CH = -\dfrac{AH}{\tan C}$

また ③は $BC = BH - CH$ と修正。

12 ある日，花子さんと太郎さんのクラスでは，数学の授業で次のような宿題が出された。

宿題：地点Aから木の先端Pを見上げた角度はα，地点Aから木に向かってdだけ近づいた地点BからPを見上げた角度はβであった。木が立っている地点をHとするとき，木の高さPHをα，β，dを用いて表せ。ただし，目の高さは無視する。

放課後，花子さんと太郎さんは出された宿題について，各自で解いてみた。次の会話は，2人とも解き終わった後に，答え合わせをしたときのものである。

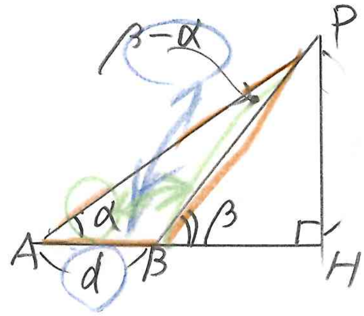
花子：太郎さんの解答の中に出てくる三角比はタンジェント (tan) だけだね。私の解答の中に出てくる三角比はサイン (sin) だけだったよ。

太郎：2つの直角三角形 △PAH，△PBH に注目したら解くことができたよ。

花子：どちらかが間違っているのかな。私は △PAB に正弦定理を使って解いたよ。

その後，数学の先生に確認したところ，2人の答の式は異なるが，ともに正解であった。上の会話の内容を踏まえて，花子さん，太郎さんのそれぞれの解法で，与えられた宿題を解け。

(花子さんの解法)



$PH = PB\sin\beta$

このとき $\angle APB = \beta - \alpha$

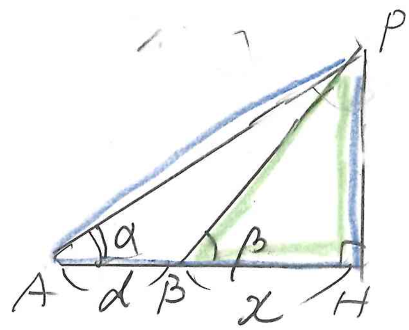
△PABにおいて正弦定理より

$$\frac{PB}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$PB = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$PH = \frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

（太郎さんの解法）



$BH = x$ とおく

$\triangle PAH$ において

$PH = (d+x)\tan\alpha$ ・・・ ①

$\triangle PBH$ において

$PH = x\tan\beta$ ・・・ ②

①, ② より

$$(d+x)\tan\alpha = x\tan\beta$$

$$x(\tan\beta - \tan\alpha) = d\tan\alpha$$

$$x = \frac{d\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

② より $PH = \dfrac{d\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$

参考

$$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$$

だから 花子さんの答えは

$$PH = \frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}$$

$$= \frac{d\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

分子分母を $\cos\alpha\cos\beta$ で割った

$$= \frac{d\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

となり太郎さんの答えと一致する