$5\ \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^p = (a^m)^p = a^{mp}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a^m}$ は a^{mp} の np 乗根

B 累乗根

$a>0$ のとき　$\sqrt[n]{a}>0$,　$(\sqrt[n]{a})^n=a$,　$\sqrt[n]{a^n}=a$

累乗根の性質

$a>0$, $b>0$ で, m, n, p は正の整数とする。

1 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　**2** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　**3** $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　**5** $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

例えば　1 $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab \Rightarrow \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ は ab の n 乗根

2 $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ は $\dfrac{a}{b}$ の n 乗根

3 $\left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m = a^m \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^m$ は a^m の n 乗根

4 $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ は a の mn 乗根

例 5

(1) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2\times4} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{12}{3}} = \sqrt[3]{4}$

(3) $(\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{3^3}} = \sqrt[3\times2]{3^{3\times1}} = \sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$

4.　5.

練習 4 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$　(2) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$　(3) $(\sqrt[3]{5})^2$　(4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{12}}$　(5) $\sqrt[8]{16}$

(1) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3\times9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(3) $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

(4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{12}} = \sqrt[4\times3]{12} = \sqrt[12]{12}$

(5) $\sqrt[8]{16} = \sqrt[2\times4]{2^{1\times4}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$

5

C 有理数の指数

指数法則が成り立つと仮定

例えば

$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{3} = a^{\frac{2}{3}\times 3} = a^{2}$ よって $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^{2}}$

$a^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^{0} = 1$ よって $a^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$

指数が有理数の場合の累乗の意味を，次のように定める。

$a>0$ で，m，n は正の整数，r は正の有理数とする。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}} \quad とくに \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^{r}}$$

例 6

(1) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^{4}} = \sqrt[3]{(2^{3})^{4}} = (\sqrt[3]{2^{3}})^{4} = 2^{4} = 16$

(2) $27^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^{3}}} = \dfrac{1}{3}$

練習 5 次の値を求めよ。

(1) $9^{\frac{1}{2}}$　　(2) $27^{\frac{2}{3}}$　　(3) $125^{-\frac{2}{3}}$

(1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \sqrt{3^{2}} = 3$

(2) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{2}} = \sqrt[3]{(3^{3})^{2}} = (\sqrt[3]{3})^{2} = 3^{2} = 9$

(3) $125^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(5^{3})^{2}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{5^{3}})^{2}} = \dfrac{1}{5^{2}} = \dfrac{1}{25}$

指数が有理数の場合にも，次の指数法則が成り立つ。

指数法則（指数が有理数）

$a>0$，$b>0$ で，r，s は有理数とする。

1 $a^{r}a^{s} = a^{r+s}$　　**2** $\dfrac{a^{r}}{a^{s}} = a^{r-s}$

3 $(a^{r})^{s} = a^{rs}$　　**4** $(ab)^{r} = a^{r}b^{r}$

指数法則が成り立つことの確認

例えば，$r=\frac{2}{3}$, $s=\frac{1}{2}$ の場合

$a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{4}{6}}a^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{a^4}\sqrt[6]{a^3}=\sqrt[6]{a^{4+3}}=a^{\frac{4+3}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$

$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[6]{a^2}=a^{\frac{2}{6}}=a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}$

例 7

(1) $5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{4}{3}}=$ $5^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=5^2=25$

(2) $(4^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}=$ $4^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$

例題 1 次の式を計算せよ。

(1) $8^{\frac{1}{2}}\times8^{\frac{1}{3}}\div8^{\frac{1}{6}}$　　(2) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}$

(1) $8^{\frac{1}{2}}\times8^{\frac{1}{3}}\div8^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=8^{\frac{4}{6}}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{6}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^1=2$

練習 6 次の式を計算せよ。

(1) $2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{4}{3}}\div2^{\frac{5}{6}}$　　(2) $3^{\frac{1}{2}}\div3^{\frac{5}{6}}\times3^{\frac{1}{3}}$

(3) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[8]{5^3}\div\sqrt{5}$　　(4) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[12]{4}\times\sqrt[4]{4}$

(1) $2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{4}{3}}\div2^{\frac{5}{6}}$
$=2^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}$
$=2^{\frac{12}{6}}=2^2=4$

(2) $3^{\frac{1}{2}}\div3^{\frac{5}{6}}\times3^{\frac{1}{3}}$
$=3^{\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}$
$=3^0=1$

(3) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[8]{5^3}\div\sqrt{5}$
$=5^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{3}{8}}\div5^{\frac{1}{2}}$
$=5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}}$
$=5^1=5$

(4) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[12]{4}\times\sqrt[4]{4}$
$=4^{\frac{1}{3}}\div4^{\frac{1}{12}}\times4^{\frac{1}{4}}$
$=4^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}$
$=4^{\frac{6}{12}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$

$a>0$ のとき，a^r の指数 r は実数にまで拡張することができる。

前ページの指数法則は，指数 r，s が実数の場合にも成り立つ。