

数学 A

第3章 整数の性質

第1節 約数と倍数

- 2020年 5月15日(金) 3限
- 2年 数学演習① 数学A
- 約数の個数が限られる自然数
等式を満たす x, y の組



[改訂版4STEP数学A 問題239]

- (1) 45の倍数で、正の約数の個数が15個である自然数 n をすべて求めよ。
- (2) 200以下の自然数のうち、正の約数が10個である数の個数を求めよ。

約数の個数に着目

教科書 p116

2^3 の正の約数は、 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ の $(3+1)$ 個ある。 $2^3 \cdot 5^2$ の正の約数は、 2^3 の正の約数と 5^2 の正の約数の積で表されるから、 $2^3 \cdot 5^2$ の正の約数の個数は $(3+1)(2+1) = 4 \cdot 3 = 12$ (個)

一般に、次のことが成り立つ。

自然数 N の素因数分解が $N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdots$ となるとき、
 N の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1) \cdots$ である。

問題

7 次のア～チに適する数字(0～9)を答えよ。

40 以下の自然数のうち、正の約数が6個である数を求めよう。

(1) 素数 p を用いて $p^{\text{ア}}$ で表される数は、正の約数が6個である。

$p^{\text{ア}}$ が40以下となる p は、 $p = \text{イ}$ である。

(2) 2つの異なる素数 p, q を用いて $p \cdot q^{\text{ウ}}$ で表される数は、正の約数が6個である。 $q = 2$ のとき、 $p \cdot q^{\text{ウ}}$ が40以下となる p は、小さい順に $p = \text{エ}, \text{オ}, \text{カ}$ である。

$q = 3$ のとき、 $p \cdot q^{\text{ウ}}$ が40以下となる p は $p = \text{キ}$ である。

(3) 40 以下の自然数のうち、正の約数が6個である数は、小さい順に

$\text{クケ}, \text{コサ}, \text{シス}, \text{セソ}, \text{タチ}$ である。

6または 2×3

[問題 7]

- (1) 素数 p を用いて p^5 で表される数は、正の約数が 6 個である。

$2^5=32$, $3^5=243$ であるから、 p^5 が 40 以下となる p は、 $p=2$ である。

- (2) 2 つの異なる素数 p , q を用いて $p \cdot q^2$ で表される数の正の約数は $(1+1)(2+1)=6$ (個) である。

$q=2$ のとき、 $4p$ が 40 以下となる 2 以外の素数 p は
 $p=3, 5, 7$

$q=3$ のとき、 $9p$ が 40 以下となる 3 以外の素数 p は
 $p=2$

- (3) 40 以下の自然数のうち、正の約数が 6 個である数は、
- | | |
|--------|----------------|
| (1) から | 32 |
| (2) から | 12, 20, 28, 18 |

これらを小さい順に並べると 12, 18, 20, 28, 32

答	(ア)	5	(イ)	2	(ウ)	2	(エ)	3
	(オ)	5	(カ)	7	(キ)	2	(ク)	1
	(ケ)	2	(コ)	1	(サ)	8	(シ)	2
	(ス)	0	(セ)	2	(ソ)	8	(タ)	3
	(チ)	2						

[改訂版4STEP数学A 問題240]

次の等式を満たす整数 x , y の組をすべて求めよ。

$$(1) \quad xy - 5x - y = 0$$

$$(2) \quad xy + 3x - 4y - 18 = 0$$

$$(3) \quad xy + 8x + 4y = -40$$

$$(4) \quad 2xy - 2x - 5y = 7$$

研究

等式を満たす整数 x, y の組

等式 $xy=5$ を満たす整数 x, y はそれぞれ 5 の約数である。よって、この等式を満たす整数 x, y の組をすべて求めると、次のようになる。

$$(x, y) = (1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$$

掛けて、5になる整数の組を探す

例 1 等式 $(x-2)(y+3)=5$ を満たす整数 x, y の組をすべて求める。

x, y は整数であるから, $x-2, y+3$ も整数である。

よって

$$(x-2, y+3) = (1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$$

したがって

$$(x, y) = (3, 2), (7, -2), (1, -8), (-3, -4) \quad \boxed{\text{終}}$$

x, y の等式が、次の形に変形できるとき、例 1 のようにして、その等式を満たす整数 x, y の組がすべて求められる。

$$(x+a)(y+b)=c \quad (a, b, c \text{ は整数})$$

この形を作ろう

例 2 等式 $xy+4x-y=6$ を満たす整数 x, y の組をすべて求める。

$$xy+4x-y=x(y+4)-(y+4)+4=(x-1)(y+4)+4$$

よって、等式は $(x-1)(y+4)+4=6$

すなわち $(x-1)(y+4)=2$

この形を作ろう

x, y は整数であるから、 $x-1, y+4$ も整数である。

よって

$$(x-1, y+4)=(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$$

したがって

$$(x, y)=(2, -2), (3, -3), (0, -6), (-1, -5) \quad \boxed{\text{終}}$$

練習 1 次の等式を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

(1) $xy + 4x - 3y = 15$

(2) $xy - 5x - y - 1 = 0$

この形を作ろう

[p. 117 研究 練習 1]

(1) 等式を変形すると

$$(x-3)(y+4)=3$$

x, y は整数であるから, $x-3, y+4$ も整数である。
よって

$$(x-3, y+4) = (1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)$$

したがって

$$(x, y) = (4, -1), (6, -3), (2, -7), (0, -5)$$

この形を作ろう

(2) 等式を変形すると

$$(x-1)(y-5)=6$$

x, y は整数であるから, $x-1, y-5$ も整数である。
よって

$$(x-1, y-5) = (1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2), (-1, -6), (-6, -1), (-2, -3), (-3, -2)$$

したがって

$$(x, y) = (2, 11), (7, 6), (3, 8), (4, 7), (0, -1), (-5, 4), (-1, 2), (-2, 3)$$

[改訂版4STEP数学A 問題241]

次の等式を満たす自然数 x , y の組をすべて求めよ。

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$$

$$(2) \quad \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = 1$$

$$(3) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

数学Aの教科書 p152 章末問題Bの11の(2)を参照してください。
それでは、それを見てみましょう。

11 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $xy+2x-3y=1$ を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

(2) 等式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ を満たす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。

[章末問題 1 1]

分母を払って、この形を作ろう

(2) 等式の両辺に $2xy$ を掛けると

$$2y+2x=xy \quad \text{すなわち} \quad xy-2x-2y=0$$

整理すると $(x-2)(y-2)=4$

x, y は正の整数であるから、 $x-2, y-2$ は -1 以上の整数である。

よって $(x-2, y-2)=(1, 4), (2, 2), (4, 1)$

したがって $(x, y)=(3, 6), (4, 4), (6, 3)$