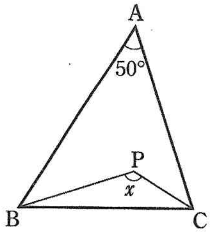
Let's think

21 右の図において，点Pが△ABCの内心，外心，垂心であるとき，角度xはどのように変わるか，それぞれ求めよ。ただし，垂心とは，三角形の各頂点から対辺に下ろした3つの垂線が交わる点である。



（Pが内心のとき）

BP，CPは，それぞれ∠B，∠Cの二等分線

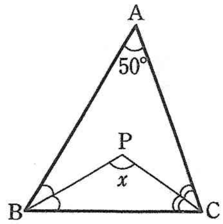
△ABCにおいて $\angle B+\angle C=180^\circ-50^\circ=130^\circ$

△PBCにおいて

$x+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=180^\circ$

$x+\frac{1}{2}\times130^\circ=180^\circ$

$x=180^\circ-65^\circ=\underline{115^\circ}$



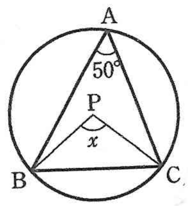
（Pが外心のとき）

△ABCの外接円の中心がPより

円周角の定理より

$x=2\times\angle BAC$

$=2\times50^\circ=\underline{100^\circ}$



（Pが垂心のとき）

線分BPの延長と辺ACの交点をD

線分CPの延長と辺ABの交点をEとする

△ABDにおいて

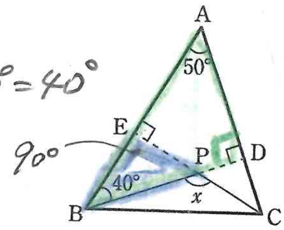
$\angle ADB=90^\circ$ より $\angle ABD=90^\circ-50^\circ=40^\circ$

△PBEにおいて

$\angle BPC=\angle PEB+\angle PBE$

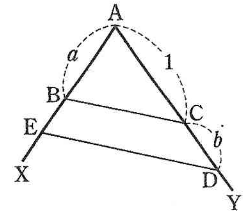
$=90^\circ+40^\circ=130^\circ$

$\underline{x=130^\circ}$



22 長さ1, a, b の線分が与えられたとき, 長さ $a\sqrt{b}$ の線分を作図することを考える。

(1) まず, 長さ ab の線分を作図する。右の図のように, 半直線AX, AY上に $AB=a$, $AC=1$, $CD=b$ となるように点B, C, Dをとり, 点Dを通りBCに平行な直線と半直線AXの交点をEとすると, $BE=ab$ である。この理由を述べよ。



$BC \parallel ED$

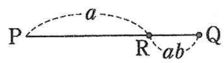
より

$AB : BE = AC : CD$

$a : BE = 1 : b$

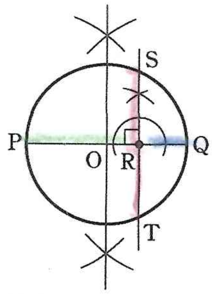
$\therefore BE = ab$

(2) (1)で得られた長さ ab の線分を使って, 右の図のように線分PQをかいた。この図を使って, 長さ $a\sqrt{b}$ の線分を作図する手順を説明せよ。



① 線分PQの垂直二等分線とPQの交点をOとし, Oを中心として, 半径OPの円をかく。

② 点Rを通り, PQに垂直な直線と円Oとの交点をS, Tとする



このとき 方べきの定理により

$RR \cdot RQ = RS \cdot RT$

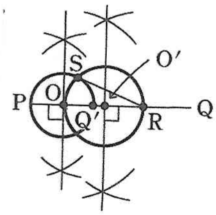
$RS = RT$ より $RS^2 = a \cdot ab = a^2b$

$\therefore RS = a\sqrt{b}$

別 ① 線分PR上 $RQ' = ab$ となる点Q'をとる

② 線分PQ'の垂直二等分線とPQ'の交点をOとし, Oを中心として半径OPの円をかく。

③ 線分ORの垂直二等分線とORの交点をO'とし O'を中心として半径OO'の円をかき, 円Oとの交点の1つをSとする



このとき 点SはORを直径とする円周上にあるから, $\angle OSR = 90°$

方べきの定理により $RS^2 = RQ' \cdot RP = ab \cdot a = a^2b$

$\therefore RS = a\sqrt{b}$