5 常用対数

大きい数や小さい数

$$1620000=1.62\times10^{6},\ 0.000618=6.18\times10^{-4}$$

A 常用対数

正の数 M は，次の形で表すことができる。

$M=a\times10^{n}$　　ただし，n は整数で，$1\leqq a<10$

$$\log_{10}M=\log_{10}a+\log_{10}10^{n}=\log_{10}a+n$$

10 を底とする対数を **常用対数** という。

＊$1\leqq a<10$ であるから，$\log_{10}a$ の値の範囲は $0\leqq\log_{10}a<1$ である。

常用対数表では

$\log_{10}$ ◯ ← 真数は 0～1の値のみ

$\log_{10}1.62=0.2095$

数	0	1	2	3
…	……	……	……	……
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625

例 13 常用対数表によると　$\log_{10}1.62=0.2095$

この値を用いて，$\log_{10}1620000$，$\log_{10}0.00162$ を計算すると

$$\log_{10}1620000=\log_{10}(1.62\times10^{6})=\log_{10}1.62+\log_{10}10^{6}$$
$$=0.2095+6=\underline{6.2095}$$

$$\log_{10}0.00162=\log_{10}(1.62\times10^{-3})=\log_{10}1.62+\log_{10}10^{-3}$$
$$=0.2095-3=\underline{-2.7905}$$

練習 27 常用対数表を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めよ。

(1) $\log_{10}3450$　　(2) $\log_{10}92000$　　(3) $\log_{10}0.000618$

(1) $\log_{10}3450=\log_{10}(3.45\times10^{3})=\log_{10}3.45+\log_{10}10^{3}=0.5378+3=\underline{3.5378}$

(2) $\log_{10}92000=\log_{10}(9.2\times10^{4})=\log_{10}9.2+\log_{10}10^{4}=0.9638+4=\underline{4.9638}$

(3) $\log_{10}0.000618=\log_{10}(6.18\times10^{-4})=\log_{10}6.18+\log_{10}10^{-4}=0.7910-4=\underline{-3.2090}$

B 常用対数の応用

たとえば，正の数Nの整数部分が3桁であるとは，Nが

$100 \leqq N < 1000$　　すなわち　　$10^2 \leqq N < 10^3$

$\log_{10} 10^2 \leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^3$　すなわち　$2 \leqq \log_{10} N < 3$

例題 7　3^{20} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$$\log_{10} 3^{20} = 20\log_{10} 3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$$

$$9 < \log_{10} 3^{20} < 10$$

だから　$10^9 < 3^{20} < 10^{10}$

よって　3^{20}は 10桁の整数である

練習 28　2^{100} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

$$\log_{10} 2^{100} = 100\log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$$

$$30 < \log_{10} 2^{100} < 31$$

だから　$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$

よって 2^{100}は 31桁の整数である

応用例題 5　2^n が 10 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

2^nが10桁の数となるのは　$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$　のときである。

$$9 \leqq n\log_{10} 2 < 10$$

$$\frac{9}{\log_{10} 2} \leqq n < \frac{10}{\log_{10} 2} \quad \cdots\cdots ①$$

このとき　$\dfrac{9}{\log_{10} 2} = \dfrac{9}{0.3010} = 29.9\cdots$

$\dfrac{10}{\log_{10} 2} = \dfrac{10}{0.3010} = 33.2\cdots$

不等式①を満たす自然数nは　$n = 30, 31, 32, 33$

練習 29 3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

3^nが8桁の数であるから

$$10^8 \leqq 3^n < 10^9$$

$$8 \leqq n\log_{10}3 < 9$$

$$16.7\cdots = \frac{8}{\log_{10}3} \leqq n < \frac{9}{\log_{10}3} = 18.8\cdots$$

これをみたす 自然数 n は $\underline{n=17, 18}$

$0<M<1$ である小数 M と常用対数 $\log_{10}M$ の値の関係

たとえば，M の小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れるとは，M が

$$0.001 \leqq M < 0.01$$

すなわち $$10^{-3} \leqq M < 10^{-2}$$

$$\log_{10}10^{-3} \leqq \log_{10}M < \log_{10}10^{-2}$$

すなわち $$-3 \leqq \log_{10}M < -2$$

例題 8 $\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{30} = 30\log_{10}\frac{1}{3} = -30\log_{10}3 = -14.313$$

$$-15 < \log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{30} < -14$$

$$10^{-15} < \left(\frac{1}{3}\right)^{30} < 10^{-14}$$

よって <u>小数第15位に</u>初めて 0でない数字が現れる.

練習 30 $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = -20\log_{10}2 = -6.020$$

$$-7 < \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} < -6$$

$$10^{-7} < \left(\frac{1}{2}\right)^{20} < 10^{-6}$$

よって 小数第7位に初めて 0でない数字が現れる