# 第1節 約数と倍数

## 1 約数と倍数

自然数 1, 2, 3, ……に, 0 と −1, −2, −3, ……とを合わせて **整数** という。

整数 $\underbrace{\cdots\cdots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1}_{\text{負の整数}},\ 0,\ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots}_{\text{正の整数(自然数)}}$

### A 約数と倍数

2つの整数 $a$, $b$ について,

ある整数 $k$ を用いて $a=bk$ と表される

とき, $b$ は $a$ の **約数** であるといい, $a$ は $b$ の **倍数** であるという。

$b$ は $a$ の約数
$a=bk$
$a$ は $b$ の倍数

整数

**例題 1** $a$, $b$ は整数とする。次のことを証明せよ。

$a$, $b$ が3の倍数ならば, $2a+b$ は3の倍数である。

$a$, $b$ は3の倍数であるから
$a=3k$, $b=3l$ ($k$, $l$ は整数)
と表される。
このとき $2a+b=2\cdot 3k+3l=3(2k+l)$
$2k+l$ は整数だから, $2a+b$ は3の倍数である。

### B 倍数の判定法

| | | |
|---|---|---|
| 2の倍数 | … | 一の位が 0, 2, 4, 6, 8 のいずれかである |
| 5の倍数 | … | 一の位が 0, 5 のいずれかである |
| 3の倍数 | … | 各位の数の和が3の倍数である |
| 9の倍数 | … | 各位の数の和が9の倍数である |

追加
4の倍数
… 下2桁が4の倍数
123◎◎

**例 2** 3の倍数の判定法, 9の倍数の判定法

3桁(けた)の自然数 $N$ について, 百の位が $a$, 十の位が $b$, 一の位が $c$ であるとき, $N$ は $N=100a+10b+c$ と表される。

$$N=99a+9b+(a+b+c)=9(11a+b)+(a+b+c)$$

$9(11a+b)$ は9の倍数であり, 3の倍数でもある。

よって, 次のことがいえる。

$N$ が3の倍数であるのは, $a+b+c$ が3の倍数のときである。

$N$ が9の倍数であるのは, $a+b+c$ が9の倍数のときである。

## C 素因数分解

2以上の自然数で，正の約数が1とその数自身のみである数を **素数** という。たとえば，20以下の素数は次の数である。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

1は素数ではない。

**素因数分解**　$15=3\cdot5$，$60=3\cdot4\cdot5$

$$504=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7=2^3\cdot3^2\cdot7$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 504 \\ 2 & 252 \\ 2 & 126 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

最小の素数2で割りつづける

次の素数3で割りつづける

素数7が残る

**例題 2**　$\sqrt{60n}$ が自然数になるような最小の自然数 $n$ を求めよ。

$60=2^2\cdot3\cdot5$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 60 \\ 2 & 30 \\ 3 & 15 \\ & 5 \end{array}$$

$60n$ が自然数となるのは，素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである

よって求める最小の自然数 $n$ は

$n=3\cdot5=15$

**例 3**　200の正の約数をすべて求める。

200を素因数分解すると　$200=2^3\cdot5^2$

よって，200の正の約数は

$2^0\cdot5^0=1$，$2^0\cdot5^1=5$，$2^0\cdot5^2=25$

$2^1\cdot5^0=2$，$2^1\cdot5^1=10$，$2^1\cdot5^2=50$

$2^2\cdot5^0=4$，$2^2\cdot5^1=20$，$2^2\cdot5^2=100$

$2^3\cdot5^0=8$，$2^3\cdot5^1=40$，$2^3\cdot5^2=200$

200の正の約数は　$2^a\cdot5^b$　$(a=0,1,2,3\ ;\ b=0,1,2)$

その個数は　$(3+1)(2+1)=12$ 個

自然数 $N$ の素因数分解が $N=p^a\cdot q^b\cdot r^c\cdots\cdots$ となるとき，
$N$ の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$ である。

## 研究　等式を満たす整数 $x$, $y$ の組

等式 $xy=5$ を満たす整数 $x$, $y$ はそれぞれ5の約数である。

$$(x,\ y)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$$

**例1**　等式 $(x-2)(y+3)=5$ を満たす整数 $x$, $y$ の組をすべて求める。

$x$, $y$ は整数だから $x-2$, $y+3$ も整数

$(x-2,\ y+3)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

したがって

$(x,\ y)=(3,\ 2),\ (7,\ -2),\ (1,\ -8),\ (-3,\ -4)$

**例2**　等式 $xy+4x-y=6$ を満たす整数 $x$, $y$ の組をすべて求める。

$\boxed{(x+a)(y+b)=c \quad (a,\ b,\ c\text{ は整数})}$

与式より　$(x-1)(y+4)=2$

$x$, $y$ は整数だから $x-1$, $y+4$ も整数

$(x-1,\ y+4)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (-1,\ -2),\ (-2,\ -1)$

したがって $(x,\ y)=(2,\ -2),\ (3,\ -3),\ (0,\ -6),\ (-1,\ -5)$

問題集　40頁　7 整数の性質　Basic

**26** (1)　280 を素因数分解せよ。

$280=2^3\cdot5\cdot7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 280 \\ 2 & 140 \\ 2 & 70 \\ 5 & 35 \\ & 7 \end{array}$$

(2)　$\sqrt{280n}$ が自然数になるような最小の自然数 $n$ を求めよ。

各素因数の指数が偶数になればよいから

$n=2\cdot5\cdot7=70$

**30** (1)　次の ア□, イ□, ウ□ に当てはまる整数を求めよ。

$xy+7x-3y=(x-{}^{ア}\boxed{3})(y+{}^{イ}\boxed{7})+{}^{ウ}\boxed{21}$

(2)　次の等式を満たす整数 $x$, $y$ の組をすべて求めよ。

$xy+7x-3y=16$

$(x-3)(y+7)=-5$

$x$, $y$ は整数だから $x-3$, $y+7$ も整数

したがって $(x-3,\ y+7)=(1,\ -5),\ (5,\ -1),\ (-1,\ 5),\ (-5,\ 1)$

よって $(x,\ y)=(4,\ -12),\ (8,\ -8),\ (2,\ -2),\ (-2,\ -6)$