オイラーの多面体定理の証明

オイラーの多面体定理：
任意の（穴のない）多面体において，頂点の数を V，辺の数を E，面の数を F とおくと，$V-E+F=2$ が成立する。

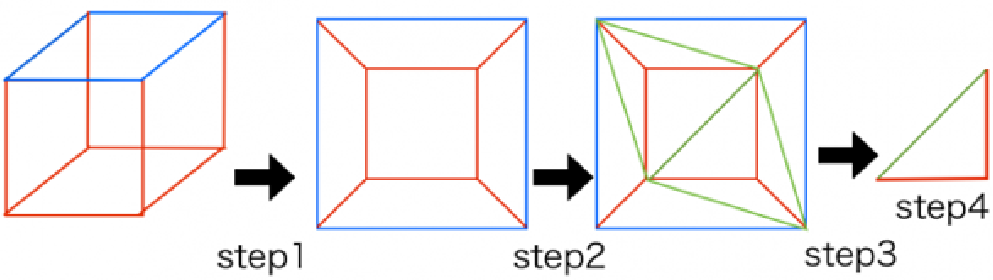
オイラーの多面体定理の覚え方

まずは簡単な例で確認してみます。
正四面体では，$V=4, E=6, F=4,$より，$V-E+F=2$
正六面体では，$V=8, E=12, F=6,$より，$V-E+F=2$

オイラーの多面体定理は非常に美しい定理です。記号は，それぞれの単語：頂点(Vertex)，辺(Edge)，面(Face)の英語表記の頭文字に由来しています。

証明の概略

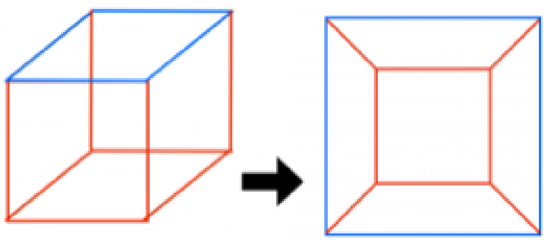
4段階に分けて証明します。1つ1つは難しくないのですが，4つ組み合わせると美しい定理の証明ができちゃいます。（図は立方体の例）



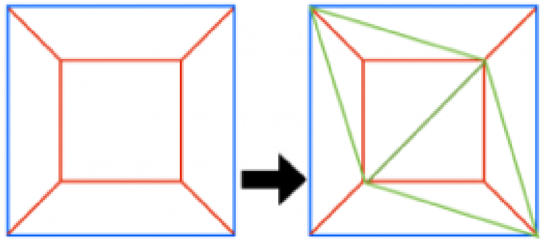
オイラーの多面体定理の証明

Step1:多面体を平面グラフに展開

3次元だと考えにくいので，2次元に展開して考えます。イメージとしては，「多面体の面を1つ選んで，その面を取り除き，その穴から手を突っ込んで押し広げながら潰す」感じです。このとき，頂点や辺の数は変わらず，面を1つ取り除くので，展開された平面図形において，$V-E+F=1$ を示せばよいわけです。立方体の図の例では，青い辺で囲まれた面を取り除いて展開しています。



Step2:平面グラフを三角形に分割

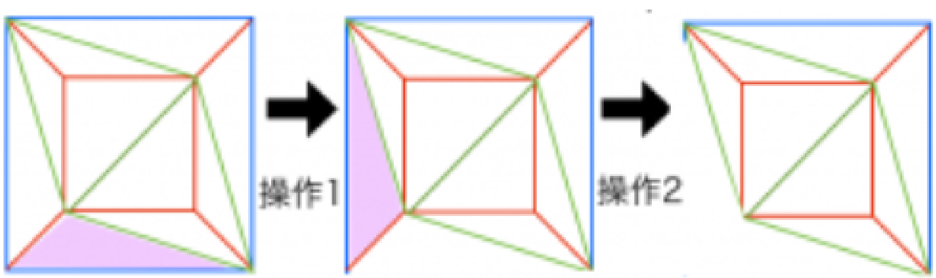


得られた平面図形には様々な多角形が含まれており，統一的に議論したいので三角形に直します。三角形でない図形は適当に対角線を引いて三角形に分割します。対角線を引くときに，面と辺の数が1つずつ増えるので $V-E+F$ の値は変わりません。
よって，分割後の図形で $V-E+F=1$ を示せばよいわけです。

Step3:三角形を除いていく

得られた図形の $V-E+F$ の値を保ったまま外側の三角形から順々に消していきます。
操作1：外側と1辺を共有する三角形を除くと辺と面が1つずつ減るので，$V-E+F$ は変わりません。
操作2：外側と2辺を共有する三角形を除くと頂点と面が1つずつ減り辺が2つ減るので，$V-E+F$ は変わりません。

三角形の数は有限なので，この操作を繰り返し行うといつかは三角形1つになります。（厳密には操作の途中で図形が分断されるのを防ぐため，操作2を操作1より優先して行う必要があります）



Step4:最後に三角形で確認

三角形では，頂点3，辺3，面1より，$V-E+F=1$ が成立します。

以上からオイラーの多面体定理が証明されました！

「高校数学の美しい物語」（難波博之著）より