D 組分けの総数

応用例題 8

6 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) A，B，C の 3 つの部屋に，2 人ずつ分ける。

(2) 2 人ずつの 3 つの組に分ける。

(1) 6人 a b c d e f

A [2人] B [2人] C [ ] 残る2人

$_6C_2$通り $_4C_2$通り

部屋Aの2人の選び方は $_6C_2$ 通り
残り4人から部屋Bの2人の選び方は $_4C_2$ 通り
残る2人は部屋Cとなるから

分け方の総数は

$_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 90$ (通り)

(2) (1)で，同じ人数の組のA,B,Cの区別をなくすと，3!通りずつ同じ組分けができるから，分け方の総数は

$\frac{90}{3!} = \frac{90}{6} = 15$ (通り)

この組み分けで同じになるもの

	{a, b}	{c, d}	{e, f}
	↓	↓	↓
3!通り	A	B	C
	A	C	B
	B	A	C
	B	C	A
	C	A	B
	C	B	A

練習 28

8 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) A，B，C，D の 4 つの組に，2 人ずつ分ける。

(2) 2 人ずつの 4 つの組に分ける。

(3) 3 人，3 人，2 人の 3 つの組に分ける。

(1) Aの組の2人の選び方は $_8C_2$ 通り，残る6人からBの組の2人の選び方は $_6C_2$ 通り
更に残る4人からCの組の2人の選び方は $_4C_2$ 通り，残った2人がDの組となるから
分け方の総数は

$_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 2520$ (通り)

(2) (1)で同じ人数の組のA,B,C,Dの区別をなくすと，4!通りずつ同じ組分けができるから，分け方の総数は

$\frac{2520}{4!} = \frac{2520}{24} = 105$ (通り)

(3) 8人から2人の組に入る選び方は $_8C_2$ 通り
残った6人を3人ずつの2組に分ける選び方は $\frac{_6C_3}{2!}$ 通り

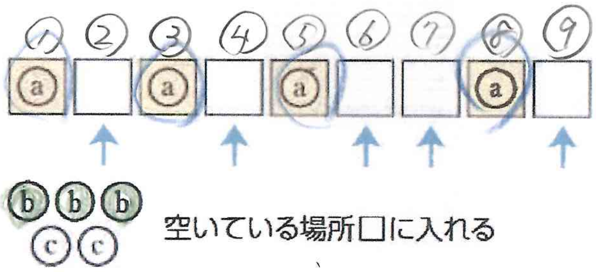
$_8C_2 \times \frac{_6C_3}{2!}$
$= \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{1}{2 \cdot 1}$
$= 280$ (通り)

6人を2人ずつの2組
2!通り {(a,b)(c,b) / (c,d)(a,b)}

34P

E 同じものを含む順列

例 10 aが4個，bが3個，cが2個の全部を1列に並べる順列の総数を求める。



(例)10の別の考え方
$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ の9個の並べ方は $9!$ 通りある
・a_1, a_2, a_3, a_4 の区別をなくすと $4!$ 通りは同じ並び方
・b_1, b_2, b_3 の区別をなくすと $3!$ 通りは同じ並び方
・c_1, c_2 の区別をなくすと $2!$ 通りは同じ並び方

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260\text{(通り)}$$

[1] 9個の場所から ⓐ を置く4個の選び方は ${}_9C_4$ 通り
[2] 残り5個の場所から ⓑ を置く3個の選び方は ${}_5C_3$ 通り
[3] 残り2個の場所に ⓒ を置く

よって求める順列の総数は

$${}_9C_4 \times {}_5C_3 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 1260\text{(通り)}$$

一般に，aがp個，bがq個，cがr個の合計n個全部を1列に並べる順列の総数は，次のようになる。

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!}$$

$$= \frac{n!}{p!q!r!}$$

← $p+q+r=n$ から $n-p-q=r$

同じものを含む順列の総数

aがp個，bがq個，cがr個あるとき，それら全部を1列に並べる順列の総数は

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q = \frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし } p+q+r=n$$

(例)10の別の考え方を参照

例題 7 7個の数字1，1，1，2，2，3，3の全部を使って，7桁の整数を作るとき，何個の整数が作れるか。

3個 2個 2個

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = 210\text{(個)}$$

或いは

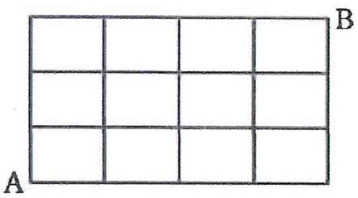
$$\frac{7!}{3!2!2!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 210\text{(個)}$$

練習 29 BANANAの6文字をすべて使って文字列を作るとき，何通りの文字列が作れるか。

Aを3個，Nを2個，Bを1個使ってできる順列だから

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = \underline{60\text{（通り）}}$$

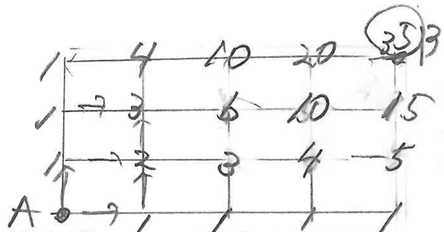
応用例題 9 右の図は，ある地域の道を直線で示したものである。交差点Aから交差点Bまで遠回りをしないで行く最短の道順は，何通りあるか。



AからBまで行く最短経路の道順は
右(→)を4回と，上(↑)を3回選んで
できる順列で表されるから

$$\frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = \underline{35\text{（通り）}}$$

別

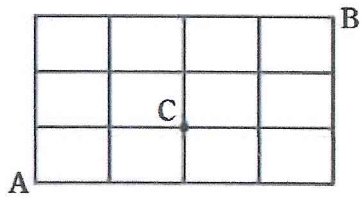


練習 30 右の図のような道のある地域で，次のような最短の道順は何通りあるか。

(1) CからBまで行く。

(2) AからCを通ってBまで行く。

(3) AからCを通らずにBまで行く。



(1) $\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = \underline{6\text{（通り）}}$

(2) AからCまで行く道順は $\frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3}{1} = 3$（通り）

したがってAからCを通ってBまで行く道順は
$3\times 6 = \underline{18\text{（通り）}}$

(3) AからBまで行く道順は $\frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$（通り）

(2)より Cを通らない道順は $35-18 = \underline{17\text{（通り）}}$

64 次の値を求めよ。

*(1) ${}_4C_2$

$= \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$

*(3) ${}_7C_7 = 1$

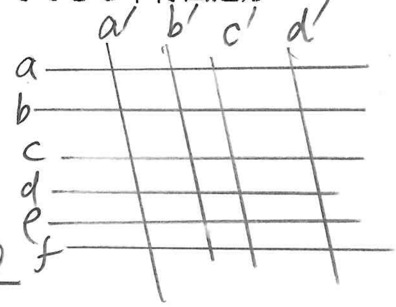
*(6) ${}_9C_7 = {}_9C_2$

$= \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$

***67** 6 本の平行線と，それらに交わる 4 本の平行線とによってできる平行四辺形は何個あるか。

6本の平行線から2本，
4本の平行線から2本 選ぶと
平行四辺形が1個できるから

${}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 90$(個)



68 *(1) a，b，b，b，c，c，d の 7 文字を 1 列に並べる方法は何通りあるか。

aを1個，bを3個，cを2個，dを1個を1列に並べるから

$\frac{7!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 420$(通り)

***69** 男子 6 人，女子 4 人の中から 4 人の委員を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1) すべての選び方　　(2) 男子の委員 2 人，女子の委員 2 人を選ぶ。

(3) 女子が少なくとも 1 人選ばれる。

(4) 特定の 2 人 a，b がともに選ばれる。

(5) a は選ばれるが，b は選ばれない。

(1) ${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$(通り)

(2) ${}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 90$(通り)

(3) 4人とも男子を選ぶ方法は ${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$(通り)
よって求める委員の選び方は $210 - 15 = 195$(通り)

(4) 特定の2人を先に選び残り8人から2人選べばよいから
${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$(通り)

(5) aを先に選んでおき，aとbを除いた8人から3人を選べばよいから
${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$(通り)