研究　重複を許して作る組合せ

例 1　3個の文字 a, b, c から，重複を許して 7 個取る組合せの総数を求める。

たとえば，a を 4 個，b を 2 個，c を 1 個取る組合せを aaaabbc と表すとする。ここで，文字を○，文字が変わるところを｜で表すと，文字の組合せと，○と｜を並べる順列が，次のように対応する。

　　　　　　　　a　　b　c

aaaabbc　⟷　○○○○｜○○｜○

aaabbcc　⟷　○○○｜○○｜○○

aabbbbb　⟷　○○｜○○○○○｜

ccccccc　⟷　｜｜○○○○○○○

　　　　　………

求める組合せは、$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}$

a, b, c の入る「○」7個と　「仕切りの「｜」2個」が

a, b, c の合計 7個　　a, b, c の3個の仕切り（3種類）3−1=2

の 9個 を一列に並べる順列に対応する。

7+2

$\boxed{1}$〜$\boxed{9}$ の 9箇所のうち ○ の入る 7個を選べばよいので

$${}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} = 36 \text{（通り）}$$

7+(3−1)

一般に，異なる n 個のものから重複を許して r 個取って作る組合せの総数は，$(n-1)$ 個の｜と r 個の○を並べる順列の総数に等しい。すなわち，$\{(n-1)+r\}$ 個の場所から r 個の場所を選ぶ方法の総数に等しい。

したがって，次のことが成り立つ。

重複を許して取る組合せ

異なる n 個のものから重複を許して r 個取る組合せの総数は

（n 種類）　　${}_{n+r-1}C_r$

例 2　3 種類の果物から重複を許して 5 個取って作る組合せの総数は

$${}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = \underline{21\ (通り)}$$

練習 1　4 個の文字 $\underbrace{a,\ b,\ c,\ d}_{4種類}$ から重複を許して 7 個取る組合せの総数を求めよ。

$${}_{4+7-1}C_7 = {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = \underline{120\ (通り)}$$

例 3　等式 $x+y+z=8$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の個数を求める。

3個の文字 a, b, c から重複を許して a を x 個, b を y 個
c を z 個取って 合計 8 個にする方法の総数と同じである
異なる 3 個のものから重複を許して 8 個取る組合せの総数に
等しいから

$${}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45\ (個)$$

練習 2　等式 $x+y+z=10$ を満たす負でない整数 x, y, z の組は，全部で何個あるか。

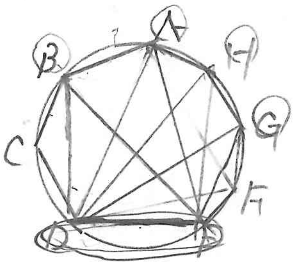
異なる 3 個のものから重複を許して 10 個取る組合せの総数
に等しいから

$${}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12\cdot 11}{2\cdot 1} = \underline{66\ (個)}$$

***70** 円に内接する八角形の 3 個の頂点を結んで三角形を作る。

(1) 八角形と 1 辺だけを共有する三角形は何個あるか。

(2) 八角形と辺を共有しない三角形は何個あるか。



(1) 共有する1辺の選び方は 8通り

共有する辺が決まったとき、1辺だけを共有する三角形の頂点の選び方は 4通りのみ

$8 \times 4 = \underline{32}$ (個)

(2) 八角形の3個の頂点を選んでできる三角形は

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ (個)}$$

八角形と1辺だけを共有する三角形は (1)より 32個

八角形と2辺を共有する三角形は 8個

よって求める三角形の個数は $56-(32+8)=\underline{16}$ (個)

***71** 1 から 20 までの 20 個の整数から，異なる 3 個を選んで組を作る。

(1) 奇数だけを含んでいる組は何通りできるか。

(2) 奇数も偶数も含んでいる組は何通りできるか。

(3) 3 個の数の和が奇数となる組は何通りできるか。

1から20のうちの偶数は10個，奇数は10個

(1) ${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{120 \text{ (通り)}}$

(2) 異なる3個の整数の組の総数は

$${}_{20}C_3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140 \text{ (通り)}$$

このうち奇数だけを含んでいる組は (1)から 120 (通り)

また偶数だけを含んでいる組は ${}_{10}C_3 = 120$ (通り)

よって求める場合の数は

$$1140-(120+120)=900 \text{ (通り)}$$

(3) 3個の数の和が奇数となるのは次の何れか

i) 3個とも奇数となる場合

その選び方は (1)より 120通り

ii) 2個が偶数で，1個が奇数となる場合

その選び方は ${}_{10}C_2 \times {}_{10}C_1 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \times 10 = 450$ (通り)

よって求める場合の数は

$120+450=\underline{570 \text{ (通り)}}$