72p, 73p

第1節　等差数列と等比数列

1　数列と一般項

A　数列の表記

数を一列に並べたものを 数列 という

数列を一般的に表すには，次のように書く。

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$

この数列を $\{a_n\}$ と略記することもある。

a_1が初項，
$a_{\bullet}$が第●項

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき，

a_n を数列 $\{a_n\}$ の **一般項** という。

例 1　一般項が $a_n=3n-2$ である数列 $\{a_n\}$ の第 4 項までを求める。

$a_1=3\cdot1-2=1$
$a_2=3\cdot2-2=4$
$a_3=3\cdot3-2=7$
$a_4=3\cdot4-2=10$

$a_{\bullet}=3\cdot\bullet-2$
この数を代入

練習 2　一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 4 項までを求めよ。

(1)　$a_n=2n-1$
$a_1=1$
$a_2=3$
$a_3=5$
$a_4=7$

(2)　$a_n=n(n+1)$
$a_1=2$
$a_2=6$
$a_3=12$
$a_4=25$

(3)　$a_n=2^n$
$a_1=2$
$a_2=4$
$a_3=8$
$a_4=16$

例 2　(1)　数列 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$ の一般項：
$a_n=(-1)^n$

(2)　数列 $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots\cdots$ の一般項　$a_n=\frac{n}{n+1}$

練習 3　次のような数列の一般項 a_n を，n の式で表せ。

(1)　偶数 2, 4, 6, 8, …… の数列で符号を交互に変えた数列

$-2,\ 4,\ -6,\ 8,\ \cdots\cdots$　　$a_n=(-1)^n\cdot2n$

(2)　分子には奇数，分母には 2 の累乗が順に現れる分数の数列

$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{16},\ \cdots\cdots$　　$a_n=\frac{2n-1}{2^n}$

74p 75p

2 等差数列

A 等差数列

数列

1, 3, 5, 7, ……

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots$$
$$\quad +2\quad +2\quad +2$$

一般に，初項に一定の数 d を次々と足して得られる数列を **等差数列** といい，その一定の数 d を **公差** という。

例 3

(1) 初項 2，公差 3 の等差数列は，次のようになる。

2, 5, 8, 11, …

(2) 等差数列 a, 13, 11, 9, …… の初項 a と公差 d を求める。

$13+d=11$ より $d=-2$

$a+(-2)=13$ より $a=15$

練習 4 次のような等差数列の初項から第 4 項までを書け。

(1) 初項 1，公差 5　　(2) 初項 10，公差 -4

1, 6, 11, 16　　10, 6, 2, -2

練習 5 次の等差数列の公差を求めよ。また，□に適する数を求めよ。

(1) 1, 5, 9, □, □, ……　　(2) 9, □, 3, 0, □, ……

公差 4　13　17　　公差 -3　6　-3

B 等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ では，a に d を次々と足すから

$a_2=a+d$,　$a_3=a+2d$,

$a_4=a+3d$,　$a_5=a+4d$,

……

$a_{\bigcirc}=a+(\bigcirc-1)d$

1 だけ小さい

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a+(n-1)d$$

⇐ 等差数列の一般項は n の 1 次式

例 4 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$ より $a_n = 3n - 1$

練習 6 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

(1) 初項 5，公差 4

$a_n = 5 + (n-1)\cdot 4$
$= 4n + 1$
$a_{10} = 41$

(2) 初項 10，公差 −5

$a_n = 10 + (n-1)(-5)$
$= -5n + 15$
$a_{10} = -35$

例題 1 第 3 項が 10，第 6 項が 1 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項を a，公差を d とする。

条件より $a_3 = a + 2d = 10$ ……①
$a_6 = a + 5d = 1$ ……②

②−①より $3d = -9$
$d = -3$

②より $a = 16$

よって一般項 a_n は $a_n = 16 + (n-1)(-3) = \underline{-3n + 19}$

練習 7 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 4 項が 15，第 8 項が 27

(2) 第 5 項が 20，第 10 項が 0

(1) 初項を a，公差を d とおくと

$a + 3d = 15$
$a + 7d = 27$

これより

$a = 6$，$d = 3$

よって

$a_n = 6 + 3(n-1)$
$\therefore \underline{a_n = 3n + 3}$

(2) 初項を a，公差を d とおくと

$a + 4d = 20$
$a + 9d = 0$

これより

$a = 36$，$d = -4$

よって

$a_n = 36 - 4(n-1)$
$\therefore \underline{a_n = -4n + 40}$

C 等差数列の性質

$a_{n+1}=a_n+d$　すなわち　$a_{n+1}-a_n=d$　　⬅ a_{n+1} は第 $(n+1)$ 項

例題 2　一般項が $a_n=3n-4$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。また，初項と公差を求めよ。

$a_{n+1}-a_n=\{3(n+1)-4\}-(3n-4)=3$

よって 数列 $\{a_n\}$ は 公差 3 の 等差数列

また　$a_1=3\cdot1-4=-1$

初項 −1，公差 3

練習 8　一般項が $a_n=2n+5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。また，初項と公差を求めよ。

$a_{n+1}-a_n=\{2(n+1)+5\}-(2n+5)=2$

よって 数列 $\{a_n\}$ は 公差 2 の等差数列

また　$a_1=2\cdot1+5=7$

初項 7　公差 2

例題 3　数列 1，x，8，…… が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

仮定より　$x-1=8-x$

$2x=9$　　$x=\frac{9}{2}$

〈補足〉 次のことが成り立つ。b を **等差中項** という。

数列 a，b，c が等差数列 $\iff$ $2b=a+c$

練習 9　次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　3，x，7，……　　(2)　$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{6}$，……

(1)　$x-3=7-x$

$2x=10$

$x=5$

(2)　$\frac{1}{x}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}-\frac{1}{x}$

$\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$

$x=8$