77p, 78p

3 等差数列の和

初項 1，公差 4 の等差数列の初項から第 8 項までの和 S を求めるのに，次のように工夫して，$2S=30\times8$ から求める方法がある。

$$\begin{array}{rl} S= & 1+\ 5+\ 9+13+17+21+25+29 \\ +)\ S= & 29+25+21+17+13+\ 9+\ 5+\ 1 \\ \hline 2S= & 30+30+30+30+30+30+30+30 \end{array}$$

← 足す項の順を逆にしている。

ここでは，この方法により，一般の等差数列の和の公式を求めよう。

A 等差数列の和の公式

初項 a，公差 d の等差数列において，第 n 項が l のとき，初項から第 n 項までの和を S_n で表すと，

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l \quad \cdots\cdots ①$$

$$+)\ S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a \quad \cdots\cdots ②$$

$$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)=n(a+l)$$

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$

第n項 $l=a+(n-1)d$

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

等差数列の和

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

1 初項 a，第 n 項 l のとき　　$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)$

2 初項 a，公差 d のとき　　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

項の個数が有限である数列では，その項の個数を **項数** といい，最後の項を **末項**（まっこう） という。上の公式 **1** は，初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和を表している。

例 5

(1) 初項 3，末項 19，項数 15 の等差数列の和 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot15(3+19)=165$$

(2) 初項 1，公差 3 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot1+(n-1)\cdot3\}=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

練習 10 次の和 S を求めよ。

(1) 初項 2，末項 10，項数 9 の等差数列の和

(2) 初項 10，公差 −4 の等差数列の初項から第 15 項までの和

(1) $S=\frac{1}{2}\cdot9(2+10)=54$　　(2) $S=\frac{1}{2}\cdot15\{2\cdot10+(15-1)\cdot(-4)\}=-270$

78p, 79p

練習 11 初項 1，公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot1+(n-1)\cdot2\}=n^2$

例題 4 次の等差数列の和 S を求めよ。

12, 15, 18, ……, 99

初項 12，公差 3 の等差数列

99が第n項とすると $12+(n-1)\cdot3=99$

$\therefore n=30$

よって $S=\frac{1}{2}\cdot30(12+99)=1665$

練習 12 次の等差数列の和 S を求めよ。

(1) 2, 6, 10, ……, 74　　(2) 102, 96, 90, ……, 6

(1) 74を第n項とすると

$2+(n-1)\cdot4=74$

$n=19$

$S=\frac{1}{2}\cdot19(2+74)=722$

(2) 6を第n項とすると

$102+(n-1)(-6)=6$

$n=17$

$S=\frac{1}{2}\cdot17(102+6)=918$

B 自然数の和，奇数の和

自然数の和，奇数の和は，等差数列の和であり，次のようになる。

$$\underbrace{1+2+3+\cdots\cdots+n}_{n項}=\frac{1}{2}n(n+1)$$ ⇐初項 1，末項 n，項数 n

$$\underbrace{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)}_{n項}=n^2$$ ⇐初項 1，末項 $2n-1$，項数 n

例 6 自然数の和，奇数の和

(1) $1+2+3+\cdots\cdots+10=\frac{1}{2}\cdot10(10+1)=55$

(2) $1+3+5+\cdots\cdots+19=\underbrace{1+3+5+\cdots+(2\cdot10-1)}_{10項}=10^2=100$

練習 13 次の和を求めよ。

(1) 1 から 100 までのすべての自然数の和　$1+2+3+\cdots\cdots+100$

(2) 1 から 55 までのすべての奇数の和　$1+3+5+\cdots\cdots+55$

(1) $1+2+\cdots+100=\frac{1}{2}\cdot100\cdot101=5050$

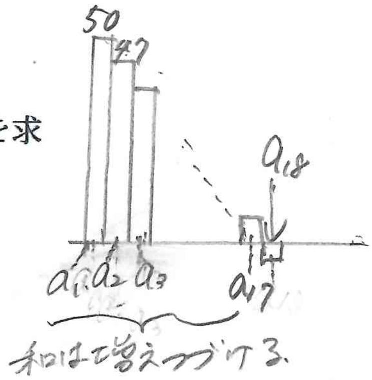
(2) $1+3+\cdots+55=\underbrace{1+3+\cdots+(2\cdot28-1)}_{28項}=28^2=784$

C 等差数列の和の最大

応用例題 1 初項が 50，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。



(1) 一般項は $a_n = 50 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 53$

第n項が負になるとすると

$$-3n + 53 < 0$$

$$n > \frac{53}{3} = 17.6\cdots$$

これを満たす最小の自然数nは $n = 18$ 　　第18項

(2) (1)より初項から第17項までの和が最大となり

その和Sは

$$S = \frac{1}{2}\cdot 17\{2\cdot 50 + (17-1)(-3)\} = 442$$

初項から第17項までの和が最大，その和は442

練習 14 初項が 100，公差が -7 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。

(1) 第n項が負になるとすると

$$a_n = 100 + (n-1)(-7) < 0$$

$$-7n + 107 < 0$$

$$n > \frac{107}{7} = 15.2\cdots$$

これを満たす最小の自然数nは $n = 16$ 　　第16項

(2) 初項から第15項までの和が最大となり

その和Sは

$$S = \frac{1}{2}\cdot 15\{2\cdot 100 + (15-1)(-7)\} = 765$$

初項から第15項までの和が最大，その和は765