80p

4 等比数列

3, 6, 12, 24, ……

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \cdots\cdots$$
$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$
$$\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=\frac{24}{12}=\cdots\cdots$$

A 等比数列

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を **等比数列** といい，その一定の数 r を **公比** という。*

例 7

(1) 初項 2，公比 -3 の等比数列は，次のようになる。

$2, -6, 18, -54, \cdots$

(2) 等比数列 a, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, …… の初項 a と公比 r を求める。

$\frac{1}{4}r=\frac{1}{8}$ より $r=\frac{1}{2}$

また $a\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ より $a=\frac{1}{2}$

練習 15 次のような等比数列の初項から第 4 項までを書け。

(1) 初項 1，公比 3

$1, 3, 9, 27, \cdots$

(2) 初項 $-\frac{1}{2}$，公比 $-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

練習 16 次の等比数列の公比を求めよ。また，□に適する数を求めよ。

(1) 1, -2, 4, □, ……

公比 -2

-8

(2) □, 8, 4, □, ……

公比 $\frac{1}{2}$

16

2

B 等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ では，a に r を次々と掛けるから

$a_2=ar$,　　$a_3=ar^2$,

$a_4=ar^3$,　　$a_5=ar^4$,

………

$$\underbrace{a_{\bigcirc}=ar^{\bigcirc-1}}_{1だけ小さい}$$

となる。また，$r^0=1$ より $a_1=a=ar^0$ である。

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}$$

例 8

(1) 初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=3\cdot2^{n-1}$

(2) 初項 -2，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) 初項 3，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

練習 17 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(1) 初項 2，公比 3　　(2) 初項 1，公比 -3

(3) 初項 2，公比 2　　(4) 初項 -3，公比 $\frac{1}{2}$

(1) $a_n=2\cdot3^{n-1}$
$a_5=2\cdot3^4=162$

(2) $a_n=(-3)^{n-1}$
$a_5=(-3)^5=81$

(3) $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$
$a_5=2^5=32$

(4) $a_n=(-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$a_5=-3\cdot\frac{1}{2^4}=-\frac{3}{16}$

81p、82p

練習 18 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots\cdots$　　(2) $\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \cdots\cdots$

(3) $5,\ -5,\ 5,\ -5,\ \cdots\cdots$　　(4) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ \cdots\cdots$

(1) 公比 -2

$a_n=(-2)^{n-1}$

(2) 公比 $\frac{1}{2}$

$a_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3) 公比 -1

$a_n=5(-1)^{n-1}$

(4) 公比 $\sqrt{2}$

$a_n=\sqrt{2}(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^n$

例題 5 第 4 項が 24，第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項を a，公比を r とする．

仮定より　$ar^3=24$ ……①

$ar^5=96$ ……②

①，② より　$r^2=4$

$\therefore r=\pm 2$

①から $r=2$ のとき $a=3$，$r=-2$ のとき $a=-3$

よって 一般項は $a_n=3\cdot 2^{n-1}$ または $a_n=-3(-2)^{n-1}$

練習 19 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 2 項が 6，第 4 項が 54　　(2) 第 5 項が -9，第 7 項が -27

(1) 初項を a，公比を r とすると

$ar=6$ ……①

$ar^3=54$ ……②

①，② より

$r^2=9$

$r=\pm 3$

$r=3$ のとき $a=2$

$r=-3$ のとき $a=-2$

一般項は

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$

または

$a_n=-2\cdot(-3)^{n-1}$

(2) 初項を a，公比を r とすると

$ar^4=-9$ ……①

$ar^6=-27$ ……②

①，② より

$r^2=3$

$r=\pm\sqrt{3}$

$r=\sqrt{3}$ のとき $a=-1$

$r=-\sqrt{3}$ のとき $a=-1$

一般項は

$a_n=-(\sqrt{3})^{n-1}$

または

$a_n=-(-\sqrt{3})^{n-1}$

82p, 86p

C 等比数列の性質

等比数列は，初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列であり，隣り合う 2 項の比が常に一定である。等比数列 $\{a_n\}$ について，すべての自然数 n で，次の関係が成り立つ。

$$a_{n+1} = ra_n \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

例題 6 数列 2，x，5，…… が等比数列であるとき，x の値を求めよ。

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{x}$$

$$\therefore \quad x^2 = 10$$

$$x = \pm\sqrt{10}$$

〈補足〉 a，b，c が 0 でないとき，次のことが成り立つ。b を **等比中項** という。

数列 a，b，c が等比数列 $\iff$ $b^2 = ac$

練習 20 数列 3，x，9，…… が等比数列であるとき，x の値を求めよ。

$$\frac{x}{3} = \frac{9}{x}$$

$$\therefore \quad x^2 = 27$$

$$x = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$$

問題

5 第 2 項が 3，第 5 項が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

▶p.82 例題 5

初項を a，公比を r とすると

$ar = 3$ …①

$ar^4 = 24$ …②

①，②より $r^3 = 8$

r は実数より $r = 2$

①より $a = \frac{3}{2}$

一般項は

$a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2}$

正確には

$r^3 - 8 = 0$

$(r-2)(r^2+2r+4) = 0$

$r = 2$，$r^2+2r+4 = 0$

判別式

$D/4 = 1 - 4 = -3 < 0$

実数解なし