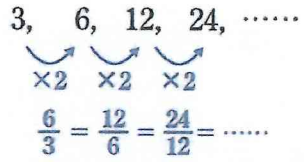


4 等比数列

3, 6, 12, 24, ……



A 等比数列

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を **等比数列** といい、その一定の数 r を **公比** という。

例 (1) 初項 2, 公比 -3 の等比数列は、次のようになる。

7 $2, -6, 18, -54, \dots$

(2) 等比数列 $a, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ の初項 a と公比 r を求める。

$$\frac{1}{4}r = \frac{1}{8} \text{ より } r = \frac{1}{2}$$

$$\text{また } a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ より } a = \frac{1}{2}$$

練習 15 次のような等比数列の初項から第 4 項までを書け。

(1) 初項 1, 公比 3

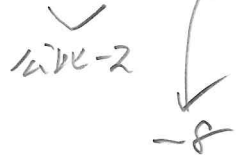
$1, 3, 9, 27, \dots$

(2) 初項 $-\frac{1}{2}$, 公比 $-\frac{1}{2}$

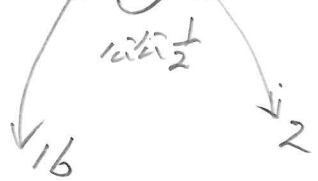
$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

練習 16 次の等比数列の公比を求めよ。また、□に適する数を求めよ。

(1) $1, -2, 4, \square, \dots$



(2) $\square, 8, 4, \square, \dots$



B 等比数列の一般項

初項 a , 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ では, a に r を次々と掛けるから

$$a_2 = ar, \quad a_3 = ar^2,$$

$$a_4 = ar^3, \quad a_5 = ar^4,$$

.....

$$a_n = ar^{n-1}$$

↑
1だけ小さい

となる。また, $r^0 = 1$ より $a_1 = a = ar^0$ である。

等比数列の一般項

初項 a , 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

例

8

(1) 初項 3, 公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

(2) 初項 -2 , 公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = -2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(3) 初項 3, 公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

練習
17

次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また, 第 5 項を求めよ。

(1) 初項 2, 公比 3

(2) 初項 1, 公比 -3

(3) 初項 2, 公比 2

(4) 初項 -3 , 公比 $\frac{1}{2}$

1) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$$a_5 = 2 \cdot 3^4 = 162$$

2) $a_n = (-3)^{n-1}$

$$a_5 = (-3)^5 = -81$$

3) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$$a_5 = 2^5 = 32$$

4) $a_n = (-3) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_5 = -3 \cdot \frac{1}{2^4} = -\frac{3}{16}$$

練習 18

次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $1, -2, 4, -8, \dots$

(2) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$

(3) $5, -5, 5, -5, \dots$

(4) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$

(1) 公比 -2
 $a_n = (-2)^{n-1}$

(2) 公比 $\frac{1}{2}$
 $a_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3) 公比 -1
 $a_n = 5(-1)^{n-1}$

(4) 公比 $\sqrt{2}$
 $a_n = \sqrt{2} (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$

例題 5

第4項が24, 第6項が96である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項を a , 公比を r とする。

仮定より

$ar^3 = 24 \dots \text{①}$

$ar^5 = 96 \dots \text{②}$

①, ②より

$r^2 = 4$

$\therefore r = \pm 2$

①より $r=2$ のときは $a=3$, $r=-2$ のときは $a=-3$

よって一般項は $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ 又は $a_n = -3(-2)^{n-1}$

練習 19

次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第2項が6, 第4項が54

(2) 第5項が-9, 第7項が-27

(1) 初項を a , 公比を r とすると

$ar = 6 \dots \text{①}$

$ar^3 = 54 \dots \text{②}$

①, ②より

$r^2 = 9$

$r = \pm 3$

$r=3$ のときは $a=2$

$r=-3$ のときは $a=-2$

一般項は

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

又は

$a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1}$

(2) 初項を a , 公比を r とすると

$ar^4 = -9 \dots \text{①}$

$ar^6 = -27 \dots \text{②}$

①, ②より

$r^2 = 3$

$r = \pm \sqrt{3}$

$r = \sqrt{3}$ のときは $a = -1$

$r = -\sqrt{3}$ のときは $a = -1$

一般項は

$a_n = -(\sqrt{3})^{n-1}$

又は

$a_n = -(-\sqrt{3})^{n-1}$

C 等比数列の性質

等比数列は、初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列であり、隣り合う2項の比が常に一定である。等比数列 $\{a_n\}$ について、すべての自然数 n で、次の関係が成り立つ。

$$a_{n+1} = ra_n \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

例題

6 数列 $2, x, 5, \dots$ が等比数列であるとき、 x の値を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{5}{x} \\ \therefore x^2 &= 10 \\ x &= \pm\sqrt{10} \end{aligned}$$

〈補足〉 a, b, c が0でないとき、次のことが成り立つ。 b を **等比中項** という。

$$\text{数列 } a, b, c \text{ が等比数列} \iff b^2 = ac$$

練習 20

数列 $3, x, 9, \dots$ が等比数列であるとき、 x の値を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{9}{x} \\ \therefore x^2 &= 27 \\ x &= \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

問題

5 第2項が3、第5項が24である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

ただし、公比は実数とする。

▶ p.82 例題 5

初項を a 、公比を r とすると

$$ar = 3 \quad \dots \text{①}$$

$$ar^4 = 24 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①, ②より} \quad r^3 = 8$$

$$r \text{ は実数より} \quad r = 2$$

$$\text{①より} \quad a = \frac{3}{2}$$

一般項は

$$a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

正解は $r = 2$

$$r^3 - 8 = 0$$

$$(r-2)(r^2+2r+4) = 0$$

$$r = 2, \quad r^2+2r+4 = 0$$

判別式

$$D_4 = 1 - 4 = -3 < 0$$

実数解なし