3 整数の割り算と商・余り

A 整数の割り算における商と余り

整数の割り算

整数 a と正の整数 b について

$$a=bq+r,\qquad 0\leqq r<b$$

となる整数 q, r は1通りに定まる。

商
$a=bq+r$
余り

例題 5 a, b は整数とする。a を7で割ると5余り，b を7で割ると4余る。次の数を7で割ったときの余りを求めよ。

(1) $a+b$　　(2) ab

仮定より $a=7k+5$, $b=7l+4$ (k, l は整数)とおける

(1) $a+b=(7k+5)+(7l+4)=7(k+l+1)+2$

よって $a+b$ を7で割ったときの余りは2である

(2) $ab=(7k+5)(7l+4)=7^2kl+7k\cdot4+5\cdot7l+20$

$=7(7kl+4k+5l+2)+6$

よって ab を7で割ったときの余りは6である

B 余りによる整数の分類

整数を2で割ったときの余りは，0，1のいずれかである。したがって，すべての整数は，整数 k を用いて

$$2k,\qquad 2k+1$$

例題 6 次のことを証明せよ。

奇数の2乗から1を引いた数は，8の倍数である。

任意の奇数は $2k+1$ (k は整数)と表される

$(2k+1)^2-1=4k^2+4k=4k(k+1)$

$k(k+1)$ は連続する2整数の積だから，2の倍数である.

したがって $4k(k+1)$ は8の倍数

よって奇数の2乗から1引いた数は8の倍数である

連続する2つの整数の積は2の倍数である。
連続する3つの整数の積は6の倍数である。

⬅ 2の倍数であり，
3の倍数でもある。

応用例題 1 nは整数とする。次のことを証明せよ。

n^2を3で割ったときの余りは，2ではない。

全ての整数は $3k$, $3k+1$, $3k+2$ (kは整数)の
何れかで表される

[1] $n=3k$ のとき
$n^2=(3k)^2=3\cdot 3k^2$ となり 3で割ったときの余りは 0

[2] $n=3k+1$ のとき
$n^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$ となり 3で割ったときの余りは 1

[3] $n=3k+2$ のとき
$n^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$ となり 3で割ったときの余りは 1

よって，何れの場合も，n^2を3で割ったときの余りは2ではない

研究 自然数の積と素因数の個数

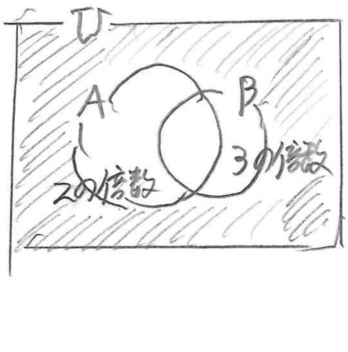
例 1 108以下の自然数で，108と互いに素であるものの個数を求める。

$$108=2^2\cdot 3^2$$

108と互いに素である自然数は「2の倍数でなく，かつ3の倍数でない」自然数である。108以下の自然数からなる集合をUとし
Uの部分集合で，「2の倍数」からなる集合をA，「3の倍数」からなる集合をB
とする

$n(A)=54$,　$n(B)=36$,　$\underbrace{n(A\cap B)}_{6の倍数}=18$

$$\therefore n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$$
$$=108-\{54+36-18\}$$
$$=108-72=\underline{36(個)}$$



例 2　1から100までの100個の自然数の積 $N=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdots100$
について，Nを素因数分解したとき，素因数5の個数を求める。

1から100までの自然数のうち
5の倍数の個数は20個，5^2の倍数の個数は4個

	… 5	… 10	… 15	… 20	… 25	… 30	……… 100
5の倍数	○	○	○	○	○	○ ………	○
5^2の倍数					○	………	○

5^3の倍数はないから
Nを素因数分解したときの，素因数5の個数は．
$\therefore 20+4=24$ (個)

28　a，bは整数とする。aを6で割ると5余り，bを6で割ると4余る。次の数を6で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$a+2b$　　(2)　ab

仮定より　$a=6m+5$，$b=6n+4$　(m，nは整数)
とおける

(1)　$a+2b=(6m+5)+2(6n+4)$
$=6(m+2n+2)+1$
$m+2n+2$は整数だから，$a+2b$を6で割ったときの余りは1

(2)　$ab=(6m+5)(6n+4)$
$=6(6mn+4m+5n+3)+2$
$6mn+4m+5n+3$は整数だからabを6で割ったときの余りは2.