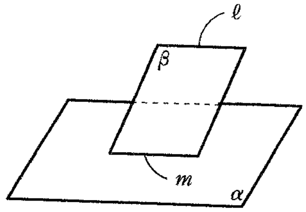
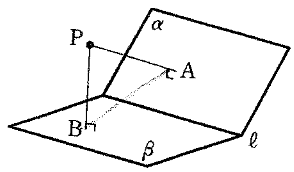
23 次の記述は常に正しいか。常には正しくない場合，正しくなるように下線部を修正せよ。

(1) 平面αに平行な直線をℓとし，直線ℓを含む平面βと平面αの交線をmとするとき，直線ℓと直線mは<u>平行である</u>。



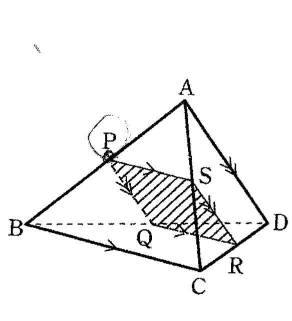
・直線ℓ // 平面α より
　直線ℓ と平面αは共有点をもたない。
・直線mは平面α上にあるから
　直線mと直線ℓは共有点をもたない。
・直線ℓ, mは同一平面β上にあるから
　ℓ // m
よって 正しい　　ねじれの位置にない)β

(2) 直線ℓで交わる2つの平面α, βがある。α上にもβ上にもない点Pから平面α, βにそれぞれ垂線PA，PBを下ろしたとき，直線ABと直線ℓは<u>垂直である</u>。



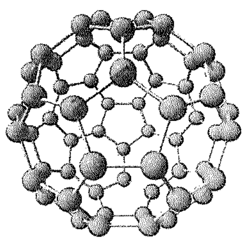
PA⊥平面α, PB⊥平面β
ℓは平面α, βの交線(平面α, β上にある)から
　PA⊥ℓ, PB⊥ℓ
よって直線ℓは平面PABに垂直
よって　AB⊥ℓ
　正しい。

(3) 四面体ABCDにおいて，辺AB上の任意の点Pを通って辺AD，辺BCに平行な平面αと辺BD，辺DC，辺CAとの交点を順にQ，R，Sとするとき，四角形PQRSは<u>ひし形</u>である。

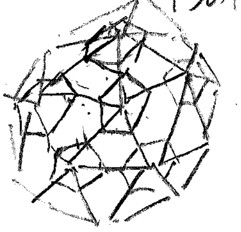


BC // PS, BC // QR から PS // QR
また AD // PQ, AD // SR から PQ // SR
よって四角形PQRSは 平行四辺形

24 (1) Aさんは化学の授業で，炭素原子が60個結合してできたフラーレンという物質があることを知った。フラーレン C_{60} は右の図のように，いくつかの正五角形と正六角形から構成される凸多面体の頂点に炭素原子が位置するような構造をしている。調べてみたところ，これは正二十面体の各頂点を，各辺を3等分する点を通る平面で切り落とした「切頂二十面体」という立体であることがわかった。この立体の辺の数と面の数を求めよ。



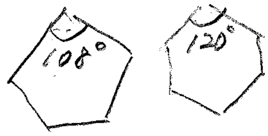
1つの頂点に対して
1つの面が増える。



正二十面体は1つの面が正三角形であり，
1つの頂点に5つの面が集まっているから，
その頂点の数は　$3\times20\div5=12$
切頂二十面体の面の数は　$20+12=32$
切頂二十面体の頂点は正二十面体の頂点1つに対して5頂点が対応するから　$5\times12=60$
オイラーの多面体の定理より辺の数 e は
$60-e+32=2$ より $e=90$
辺の数90，面の数32

オイラーの多面体定理
頂点の数 v，辺の数 e，面の数 f
$v-e+f=2$

(2) フラーレンはこの他にも，炭素原子の数が70個，76個，80個のものなどが見つかっており，これらは C_{60} と同様に，すべての面が正五角形または正六角形で構成された形となっている。しかし，炭素原子の数をいくら増やしていっても，フラーレンの形を構成する正五角形の数は常に一定である。このことを証明せよ。



フラーレンは正五角形と正六角形のみからできているから，1つの頂点に集まる面の数が4以上であるとすると，頂点の周りの角度が360°を超え，多面体ができない。
また2以下のときも多面体ができないから，1つの頂点に集まる面の数は3
また1つの辺に集まる面の数は2
正五角形が m 個，正六角形が n 個で構成されているとすると
頂点の数は $\frac{5m+6n}{3}$，辺の数は $\frac{5m+6n}{2}$，面の数は $m+n$
オイラーの多面体定理により
$$\frac{5m+6n}{3}-\frac{5m+6n}{2}+(m+n)=2$$
$$2(5m+6n)-3(5m+6n)+6(m+n)=12$$
$$\therefore m=12$$
したがって正五角形の数は12個で一定