4 組合せ

A 組合せの総数

4 個の文字 a, b, c, d から，異なる 3 個を取り出して文字の組を作るとき，次のような組が作れる。

{a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d} ……①

一般に，異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して作る組合せを

n 個から r 個取る組合せ

といい，その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す。ただし，$r \leqq n$ である。

上の①から ${}_4\mathrm{C}_3=4$ であるが，これを順列の総数から求めてみよう。

異なる4個から3個取る順列の総数 $\boxed{{}_4\mathrm{P}_3}$ との関係

4個から3個選んだ1つの組合せに対して

3!通りの並べ方がある

3番目 2番目 1番目 3×2×1通り

組合せの総数は ${}_4\mathrm{C}_3$ だから

$$\boxed{{}_4\mathrm{C}_3 \times 3! = \boxed{{}_4\mathrm{P}_3}}$$

⇩

$${}_4\mathrm{C}_3 = \frac{{}_4\mathrm{P}_3}{3!} = \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} = 4$$

n 個から r 個取る組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ については，${}_n\mathrm{C}_r \times r! = {}_n\mathrm{P}_r$ となるから

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$$

⬅ ${}_n\mathrm{C}_r$ と ${}_n\mathrm{P}_r$ の関係式

したがって，${}_n\mathrm{C}_r$ は次の式で表される。

組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$$

⬅ ${}_n\mathrm{C}_r$ は，分母も分子も r 個の数の積

〈注意〉 とくに，${}_n\mathrm{C}_1=n$，${}_n\mathrm{C}_n=1$ である。また，23 ページの等式①を用いると，

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ とも表される。ただし，${}_n\mathrm{C}_0=1$ と定める。

例 8 5 人から 3 人を選ぶとき，選び方の総数を求める。

$${}_5\mathrm{C}_3 = \frac{{}_5\mathrm{P}_3}{3!} = \frac{\overbrace{5\cdot4\cdot3}^{3コ}}{\underbrace{3\cdot2\cdot1}_{3コ}} = 10\ (通り)$$

30p. 31p

練習 23 次の値を求めよ。

(1) ${}_7C_3$　(2) ${}_4C_2$　(3) ${}_8C_1$　(4) ${}_5C_5$

(1) ${}_7C_3 = \dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = \underline{35}$

(2) ${}_4C_2 = \dfrac{4\cdot3}{2\cdot1} = \underline{6}$

(3) ${}_8C_1 = \dfrac{8}{1} = \underline{8}$

(4) ${}_5C_5 = \dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \underline{1}$

練習 24 次のような選び方の総数を求めよ。

(1) 8人から2人を選ぶ。　(2) 6色から4色を選ぶ。

(1) ${}_8C_2 = \dfrac{8\cdot7}{2\cdot1} = \underline{28\text{（通り）}}$

(2) ${}_6C_4 = \dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \underline{15\text{（通り）}}$

B ${}_nC_r$ の性質

${}_5C_3 = {}_5C_2$

${}_5C_3 = {}_5C_{5-3} = {}_5C_2$

「5人の中から3人を選ぶ」
＝
「選ばない2人を決める」

${}_nC_r$ の性質

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

${}_{○}C_{△} = {}_{○}C_{□}$

△＋□＝○

例 9 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ を使って，${}_{10}C_7$ を求める。

${}_{10}C_7 = {}_{10}C_{10-7} = {}_{10}C_3 = \dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = \underline{120}$

練習 25 次の値を求めよ。

(1) ${}_5C_4$　(2) ${}_8C_6$　(3) ${}_{20}C_{18}$

(1) ${}_5C_4 = {}_5C_1 = \underline{5}$

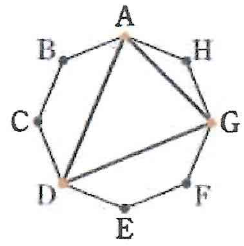
(2) ${}_8C_6 = {}_8C_2 = \dfrac{8\cdot7}{2\cdot1} = \underline{28}$

(3) ${}_{20}C_{18} = {}_{20}C_2 = \dfrac{20\cdot19}{2\cdot1} = \underline{190}$

31p, 32p

C 組合せの考え方の利用

例題 6 正八角形の 8 個の頂点のうち，3 点を結んで三角形を作るとき，三角形は何個作れるか。



8個の頂点はどの3点も一直線上にはないから
3個の点を1組決めると三角形が1個作れる。
よって作れる三角形の個数は

$${}_8C_3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$$

56個

練習 26 正六角形について，次の数を求めよ。

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数

(2) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数

(3) 対角線の本数

(1) 6個の頂点は，どの3点も一直線上にはないから，求める三角形の個数は

$${}_6C_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$$

20個

(2) 6個の頂点を結んでできる線分の本数は

$${}_6C_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15$$

15本

(3) (2)で求めた線分のうち，対角線とならないものが6本あるから

$$15 - 6 = 9$$

9本

(1つの頂点から対角線が3本引けるから $3\times6=18$ 同じものを2度数えているから $18\div2=9$)

応用例題 7 男子 6 人，女子 4 人の中から，5 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1) 男子 3 人と女子 2 人を選ぶ。

(2) 女子が少なくとも 1 人は含まれるように選ぶ。

(1) 男子3人の選び方は ${}_6C_3$ 通り，そのどの場合に対しても
女子2人の選び方は ${}_4C_2$ 通りあるから，求める選び方の総数は

$${}_6C_3 \times {}_4C_2 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = 120 \text{ (通り)}$$

(2) 10人から5人の選び方は ${}_{10}C_5$ 通り
女子が1人も選ばれない選び方(5人とも男子)は ${}_6C_5$ 通り
よって求める選び方の総数は

$${}_{10}C_5 - {}_6C_5 = {}_{10}C_5 - {}_6C_1$$
$$= \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} - 6 = 246 \text{ (通り)}$$

「女子が少なくとも1人」をAとすると Aの余事象$\overline{A}$は

4通りの場合
女 ○ ○ ○ ○
女 女 ○ ○ ○
女 女 女 ○ ○
女 女 女 女 ○

「女子が全くいない」
=「5人とも男子」
男 男 男 男 男

$$n(\overline{A}) = \underbrace{n(U)}_{\text{全事象}} - n(A)$$

練習 27 男子3人，女子5人の中から，4人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1) 男子2人と女子2人を選ぶ。

(2) 男子が少なくとも1人は含まれるように選ぶ。

(1) 男子2人の選び方は ${}_3C_2$ 通り
そのどの場合に対しても
女子2人の選び方は ${}_5C_2$ 通り あるから
求める選び方の総数は

$${}_3C_2 \times {}_5C_2 = {}_3C_1 \times {}_5C_2 = 3 \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \underline{30\ (\text{通り})}$$

(2) 8人から4人の選び方は ${}_8C_4$ 通り
男子が1人も選ばれない選び方（4人とも女子）は ${}_5C_4$ 通り
よって求める選び方の総数は

$${}_8C_4 - {}_5C_4 = {}_8C_4 - {}_5C_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 5 = \underline{65\ (\text{通り})}$$